ΜΕΘΟΔΙΚΟ

Γ΄ Γενικού Λυκείου

Ομάδα Προσανατολισμού Θετικών Επιστημών & Οικονομίας - Πληροφορικής

Μαθηματικά

Διαγώνισμα Προσομοίωσης

Ημερομηνία: **Μάιος 2020**

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το Δ.

Μονάδες 8

Α2. Έστω f μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού A. Να ορίσετε την παράγωγο της f.

Μονάδες 3

Α3. Να χαρακτηρίσετε ως Σωστές ή Λανθασμένες τις παρακάτω προτάσεις:

α. Η εικόνα $f(\Delta)$ του διαστήματος $\Delta = (\alpha, \beta)$ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι ανοικτό διάστημα.

β. Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα κάθε συνεχούς συνάρτησης $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι το μέγιστο αυτής.

γ. Αν για μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, όπου $x_0 \in A$, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0.

δ. Για οποιεσδήποτε συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = +\infty$, ισχύει: $\lim\limits_{x \to 0}\big(f(x) + g(x)\big) = 0$.

ε. Αν μια συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε θα ισχύει υποχρεωτικά $f'(x_0) = 0$.

Μονάδες 10

Α4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό: Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

α. Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό ως «Αληθή» ή «Ψευδή».

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2} - \lambda x + \beta$, με $x \in \mathbb{R}$, όπου $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Β1. Να δείξετε ότι $\lambda = 1$ και $\beta = -1$.

Μονάδες 7

Β2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα και ότι έχει σύνολο τιμών το διάστημα $(0, +\infty)$.

Μονάδες 7

Β3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) \cdot \ln f(x) - f(x), \ \ x \in \mathbb{R}$.
Να μελετήσετε τη g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 7

Β4. Να λύσετε την εξίσωση: $g(x - \eta\mu x - 1) = -1$.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Ισχύουν:

- $x \cdot f'(x) - 2f(x) = x^2$ για κάθε $x > 0$ (1)
- Η ευθεία $y = 3ex - 2e^2$ εφάπτεται στη C_f.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x^2} - \ln x$, με $x > 0$ είναι σταθερή και ότι ισχύει: $f(x) = x^2 \cdot \ln x$, για κάθε $x > 0$

Μονάδες 8

Γ2.

α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β. Αν για τους θετικούς αριθμούς α, β ισχύει: $f\left(\sqrt{\alpha}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right) = -\frac{1}{e}$, τότε να δείξετε ότι $\alpha \cdot \beta = 1$.

Μονάδες 7

Γ3. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{(\sqrt{x}-1)\cdot f(x)}$

β. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(f(x))}{x^4}$

Μονάδες 4

Γ4. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση h με τύπο: $h(x) = |f(x) + \mu x - \mu|$, με $x > 0$ και $\mu \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι: $\mu = -1$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x - 1)$ με $x > 1$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε την αντίστροφη της f.

Μονάδες 4

Αν ισχύει $f^{-1}(x) = e^x + 1, \ x \in \mathbb{R}$ τότε:

Δ2. Να αποδείξετε ότι ισχύει $f(x) < f^{-1}(x)$ για κάθε $x > 1$.

Μονάδες 4

Δ3. Έστω $d(x) = |f(x) - f^{-1}(x)|$ με $x > 1$ η συνάρτηση που περιγράφει την κατακόρυφη απόσταση των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1}. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (1,2)$, στο οποίο η συνάρτηση d έχει ελάχιστη τιμή $m > 4$.

Μονάδες 8

Δ4. Ένα σημείο $M(\alpha, f(\alpha))$ κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της f ξεκινώντας από το σημείο $A(2,0)$. Η τετμημένη του M αυξάνεται με ρυθμό $\alpha'(t) = 2\ \ \mu o\nu/sec$. Έστω t_0 η χρονική στιγμή κατά την οποία η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο M διέρχεται από το σημείο $B(1,0)$. Να αποδείξετε ότι:

α. $t_0 = \frac{e-1}{2}$

β. ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας ω που σχηματίζει η εφαπτομένη (ε) με τον άξονα $x'x$ τη χρονική στιγμή t_0 είναι $\omega'(t_0) = -\frac{2}{e^2+1}\ rad/sec$.

Μονάδες 5+4

Ευχόμαστε Επιτυχία!