1$^{\text{Ο}}$Διαγώνισμα Προσομοίωσης

Εξεταζόμενο Μάθημα: **Μαθηματικά Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών**

Ημερομηνία:Ιούνιος 2021

ΘΕΜΑ Α1

Α1. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x)>0$ στο (a,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β) να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

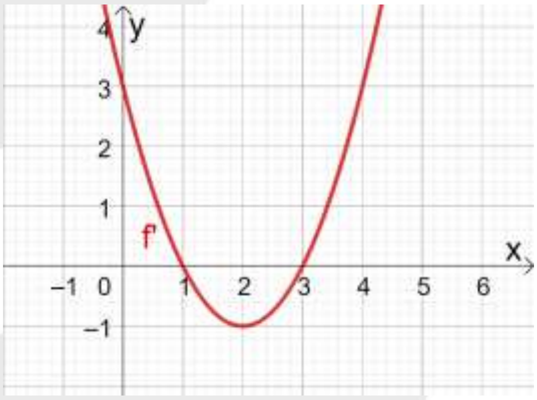
Μονάδες 8

Α2. Πότε λέμε ότι η ευθεία $x=x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη μιας συνάρτησης f;

Μονάδες 4

Α3. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Στο παρακάτω σχήμα η γραφική παράσταση της παραγώγου της συνάρτησης f.

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.



1. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1,3]$.
2. Η τιμή $y=f(3)$ αποτελεί τοπικό ελάχιστο της f.
3. Η συνάρτηση f είναι κοίλη στο $[2,+\infty)$.
4. Ισχύει: $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{1}{f'(x)}=-\infty$

Μονάδες 8

Α4. Για τη συνάρτηση f που απεικονίζεται στο ερώτημα Α3 θεωρήστε τον ισχυρισμό:

«Η εξίσωση $f(x)+x=f(2)+2$, έχει μοναδική λύση την $x=2$.»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

Μονάδα 1

β.Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α).

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται συνάρτηση $f:[0,3]\to\mathbb{R}$, συνεχής στο $[0,3]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,3)$ με συνεχή παράγωγο τέτοια ώστε: $f'(x)\neq 0$, για κάθε $x\in(0,3)$. Η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $O(0,0)$ και $A(3,9)$.

Β1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο K με τετμημένη στο διάστημα $(0,3)$, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη στην ευθεία που ορίζουν τα σημεία O και A.

Μονάδες 5

Β2. Να βρείτε το πρόσημο της f' και τη μονοτονία της f.

Μονάδες 4

Β3. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν σημεία με τετμημένες στο διάστημα $(0,3)$ στα οποία οι εφαπτόμενες της C_f να είναι ευθείες κάθετες μεταξύ τους.

Μονάδες 3

Β4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,3)$ τέτοιο ώστε: $\frac{f'(x_0)}{x_0} = 2$

Μονάδες 5

Β5. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Μονάδες 3

Β6. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (0,3)$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = 5$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{e}{x}}, & \alpha\nu \ \ 0 < x < e \\ \frac{\alpha}{\ln x}, & \alpha\nu \ \ x \geq e \end{cases}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = e$.

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $A = (0, +\infty)$ και να βρείτε την παράγωγό της.

Μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο της $A(e, f(e))$ και να αποδείξετε ότι η (ε) εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης
$g(x) = -e^{x-1} + 2e$.

Μονάδες 6

Γ4.

1. Να αποδείξετε ότι ισχύει $f(f(x)) = x$ για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 3

2. Αν $h(x) = e^{\frac{e}{x}}$ με $0 < x \leq e$ και $\varphi(x) = \frac{e}{\ln x}$ με $x \geq e$, τότε να δείξετε ότι $h^{-1}(x) = \varphi(x)$ για κάθε $x \geq e$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν:

- $f(1) > f(0)$
- $f''(x) < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

και $\left(f'(x)\right)^2 + f''(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι ισχύει: $f(x - f'(x)) < f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ και με δεδομένο ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ να δείξτε ότι η f^{-1} είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 7

Δ4. Αν επιπλέον ισχύει $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ να υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{x}$.

Μονάδες 7

Ενδεικτικές Απαντήσεις 1ου Διαγωνίσματος

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σχολικού βιβλίου, σελ. 144

Α2.Ορισμός σχολικού βιβλίου, σελ. 161

Α3.

1. **Σωστό.** (Εφόσον για κάθε $x \in (1,3)$ είναι $f'(x) < 0$ και η f είναι συνεχής, θα είναι και γνησίως φθίνουσα στο $[1,3]$.)
2. **Σωστό.**
   (Παρατηρούμε ότι $f'(3) = 0$ και για $x < 3$ είναι $f'(x) < 0$, ενώ για $x > 3$ είναι $f'(x) > 0$.
   Συνεπώς, η f θα παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x = 3$).
3. **Λάθος.** (Από τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2, +\infty)$ που σημαίνει ότι η f είναι κυρτή).
4. **Λάθος.** $\left(\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{f'(x)} = -1\right)$

Α4.α. Σωστό

β. Παρατηρούμε από τη γραφική παράσταση της f' ότι: $f'(x) + 1 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 2$. Θεωρούμε τη συνάρτηση g με $g(x) = f(x) + x$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = f'(x) + 1 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 2$. Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα και η προφανής λύση της εξίσωσης $g(x) = g(2)$ είναι μοναδική.

ΘΕΜΑ Β

Β1.Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,3]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,3)$.
Σύμφωνα με το ΘΜΤ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,3)$ ώστε να ισχύει

$$f'(\xi) = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = 3 = \lambda_{OA}$$

Οπότε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ είναι παράλληλη στην ευθεία που ορίζουν τα σημεία O και A.

Β2. Η f' είναι συνεχής στο $(0,3)$ και ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0,3)$.
Άρα, η f' διατηρεί πρόσημο στο $(0,3)$ και αφού $f'(\xi) = 3 > 0$ με $\xi \in (0,3)$, θα ισχύει τελικά $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,3)$.
Εφόσον η f είναι συνεχής στο $[0,3]$, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,3]$.

Β3. Έστω ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (0,3)$ με $x_1 \neq x_2$ έτσι ώστε οι εφαπτομένες της C_f στα σημεία $M(x_1, f(x_1))$ και $N(x_2, f(x_2))$ να είναι μεταξύ τους κάθετες.
Τότε θα ισχύει $f'(x_1) \cdot f'(x_2) = -1$, που είναι άτοπο αφού $f'(x_1) > 0$ και $f'(x_2) > 0$.

Β4. Θεωρούμε τη συνάρτηση: $g(x) = f(x) - x^2, \ \ x \in [0,3]$.
Για τη συνάρτηση g ισχύουν:

- gσυνεχής στο $[0,3]$
- g παραγωγίσιμη στο $(0,3)$, με $g'(x) = f'(x) - 2x$
- $g(0) = 0, g(3) = 0$

Σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,3)$ ώστε να ισχύει

$$g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 2x_0 \Leftrightarrow \frac{f'(x_0)}{x_0} = 2$$

Β5. Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[0,3]$ και άρα παίρνει την ελάχιστη τιμή της m όταν $x=0$ δηλαδή $m=f(0)=0$ και τη μέγιστη τιμή της M για $x=3$, δηλαδή: $M=f(3)=9$.
Προφανώς, το σύνολο τιμών της f είναι το $[f(0),f(3)]$ δηλαδή το διάστημα $[0,9]$.

Β6. Γνωρίζουμε ότι:

- η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,3]$
- $f(0)\neq f(3)$

Σύμφωνα με το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών για $\eta=5$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1\in(0,3)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f(x_1)=5$. Το ξ είναι μοναδικό αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,3]$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Επειδή η f είναι συνεχής στο σημείο $x=e$ ισχύει:

$$\lim_{x\to e^-}f(x)=\lim_{x\to e^+}f(x)=f(e)$$

Όμως $\lim\limits_{x\to e^-}f(x)=\lim\limits_{x\to e^-}e^{\frac{e}{x}}=e$ και $\lim\limits_{x\to e^+}f(x)=\lim\limits_{x\to e^+}\frac{\alpha}{\ln x}=\alpha$

Επομένως ισχύει: $\alpha=e$.

Γ2. Για κάθε $0<x<e$ ισχύει $f'(x)=-\frac{e}{x^2}\cdot e^{\frac{e}{x}}$

Για κάθε $x>e$ ισχύει $f'(x)=-\frac{e}{x\ln^2 x}$

Για να δούμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x=e$ υπολογίζουμε τα πλευρικά όρια:

$$\lim_{x\to e^-}\frac{f(x)-f(e)}{x-e}=\lim_{x\to e^-}\frac{e^{\frac{e}{x}}-e}{x-e}=\lim_{u\to 1^+}\frac{e^u-e}{\frac{e}{u}-e}\quad(1)$$

κάνοντας την αντικατάσταση $u=\frac{e}{x}$ με $u\to 1^+$ οπότε από την (1) έχουμε:

$$\lim_{x\to e^-}\frac{f(x)-f(e)}{x-e}=\lim_{u\to 1^+}\frac{e^u-e}{\frac{e}{u}-e}=\lim_{u\to 1^+}\frac{(e^u-e)'}{\left(\frac{e}{u}-e\right)'}\quad(2)$$

με χρήση του κανόνα D.l.H. για απροσδιοριστία «0/0», επομένως από τη (2) προκύπτει:

$$\lim_{x\to e^-}\frac{f(x)-f(e)}{x-e}=-\lim_{u\to 1^+}\frac{u^2\cdot e^u}{e}=-1$$

Αντίστοιχα,

$$\lim_{x\to e^+}\frac{f(x)-f(e)}{x-e}=\lim_{x\to e^+}\frac{\frac{e}{\ln x}-e}{x-e}=\lim_{x\to e^+}\frac{\left(\frac{e}{\ln x}-e\right)'}{(x-e)'}=\lim_{x\to e^+}\frac{-\frac{e}{\ln^2 x}\cdot\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to e^+}\frac{-e}{x\cdot\ln^2 x}=-1$$

με χρήση του κανόνα D.l.H. για απροσδιοριστία «0/0».

Άρα,η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x=e$ με $f'(e)=-1$.

Επομένως ισχύει: $f'(x)=\begin{cases}\frac{-e}{x^2}\cdot e^{\frac{e}{x}}, & \text{αν } o<x<e\\ \frac{-e}{x\cdot\ln^2 x}, & \text{αν } x\geq e\end{cases}$

Γ3.

Η εφαπτόμενη (ε) της C_f στο σημείο της $A(e,f(e))$ έχει εξίσωση: $y-f(e)=f'(e)\cdot(x-e)$ δηλαδή $y=-x+2e$. Είναι: $g(x)=-e^{x-1}+2e$ με $g'(x)=-e^{x-1}$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει $x_o\in\mathbb{R}$ για τον οποίο ισχύουν:

$$\begin{cases}g'(x_o)=-1\\ g(x_o)=-x_o+2e\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-e^{x_o-1}=-1\\ -e^{x_o-1}+2e=-x_o+2e\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}e^{x_o-1}=1\\ -1+2e=-x_o+2e\end{cases}\Leftrightarrow x_o=1.$$

Επομένως η ευθεία (ε): $y=-x+2e$ εφάπτεται στη C_g στο σημείο της $A(1,2e-1)$.

Γ4. α. Για κάθε $0<x<e \Leftrightarrow \frac{1}{x}>\frac{1}{e} \Leftrightarrow \frac{e}{x}>1 \Leftrightarrow e^{\frac{e}{x}}>e$ οπότε ισχύει:

$$f(f(x))=f\left(e^{\frac{e}{x}}\right)=\frac{e}{\ln\left(e^{\frac{e}{x}}\right)}=\frac{e}{\frac{e}{x}}=x$$

Για κάθε $x\geq e \Leftrightarrow \ln x\geq 1 \Leftrightarrow o<\frac{1}{\ln x}\leq 1 \Leftrightarrow o<\frac{e}{\ln x}\leq e$

οπότε ισχύει: $f(f(x))=f\left(\frac{e}{\ln x}\right)=e^{\frac{e}{\frac{e}{\ln x}}}=e^{\ln x}=x$

β. Η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(o,e]$ οπότε είναι συνάρτηση «1-1» και επομένως αντιστρέψιμη.
Θέτουμε $y=h(x)$ με $0<x\leq e$ και ισοδύναμα έχουμε:

$$y=e^{\frac{e}{x}}, \text{με } y\geq e$$
$$\Leftrightarrow \ln y=\frac{e}{x}, \text{με } y\geq e$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{e}{\ln y} \text{ ή } h^{-1}(y)=\frac{e}{\ln y}, \text{με } y\geq e$$

Άρα $h^{-1}(x)=\frac{e}{\ln x}=\varphi(x)$ για κάθε $x\geq e$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Ισχύει $\left(f'(x)\right)^2+f''(x)>0 \Leftrightarrow \left(f'(x)\right)^2>-f''(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Επειδή $\left(f'(x)\right)^2>0$ είναι $f'(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και εφόσον η f' είναι συνεχής θα διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Επίσης η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$. Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=f(1)-f(0)>0$.
Οπότε ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ2.Ισχύει: $f'(x)>0 \Leftrightarrow -f'(x)<0 \Leftrightarrow x-f'(x)<x$
Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα θα είναι: $f(x-f'(x))<f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Ακόμη είναι $f''(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.
Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x=\xi$ έχει εξίσωση:

$$y-f(\xi)=f'(\xi)\cdot(x-\xi) \Leftrightarrow y=f'(\xi)\cdot x+f(\xi)-\xi\cdot f'(\xi)$$

Επειδή η f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$, η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $x=\xi$ βρίσκεται πάνω από αυτήν με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.
Επομένως, ισχύει: $f(x)\leq f'(\xi)\cdot x+f(\xi)-\xi\cdot f'(\xi)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Όμως $\lim\limits_{x\to-\infty}[f'(\xi)\cdot x+f(\xi)-\xi\cdot f'(\xi)]=f'(\xi)\cdot\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$.
Επομένως ισχύει: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

Δ3. Γνωρίζουμε ότι: $\left(f'(x)\right)^2+f''(x)>0 \Leftrightarrow \left(f'(x)\right)^2\cdot e^{f(x)}+f''(x)\cdot e^{f(x)}>0 \Leftrightarrow$
$\left[f'(x)\cdot e^{f(x)}\right]'>0 \Leftrightarrow \left[e^{f(x)}\right]''>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Επομένως η συνάρτηση $h(x)=e^{f(x)}$είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.
Η εφαπτομένη της C_h στο σημείο της με τετμημένη $x=\xi$ έχει εξίσωση:

$$y-h(\xi)=h'(\xi)\cdot(x-\xi) \Leftrightarrow y=e^{f(\xi)}\cdot f'(\xi)\cdot x+e^{f(\xi)}-\xi\cdot e^{f(\xi)}\cdot f'(\xi)$$

Επειδή η h είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, η εφαπτομένη της C_h στο $x = \xi$ βρίσκεται κάτω από αυτήν με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.
Αφού ισχύει: $h(x) \geq e^{f(\xi)} \cdot f'(\xi) \cdot x + e^{f(\xi)} - \xi \cdot e^{f(\xi)} \cdot f'(\xi)$,για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Όμως $\lim\limits_{x \to +\infty} [e^{f(\xi)} \cdot f'(\xi) \cdot x + e^{f(\xi)} - \xi \cdot e^{f(\xi)} \cdot f'(\xi)] = e^{f(\xi)} \cdot f'(\xi) \cdot \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$.

Συνεπώς προκύπτει: $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$ άρα και

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[\ln e^{f(x)}\right] = \lim_{x \to +\infty} [\ln h(x)] \xrightarrow{u=h(x),\ u \to +\infty} \lim_{x \to +\infty} \ln u = +\infty$$

Γνωρίζουμε ότι: $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$, για κάθε $x \in f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
Παραγωγίζοντας παίρνουμε: $f'\left(f^{-1}(x)\right) \cdot (f^{-1})'(x) = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Επομένως ισχύει $(f^{-1})'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
οπότε η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
Έστω $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ με $y_1 < y_2$. Ισοδύναμα έχουμε:

$$f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2) \overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(f^{-1}(y_1)) > f(f^{-1}(y_2))$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{f'(f^{-1}(y_1))} < \frac{1}{f(f^{-1}(y_2))} \Leftrightarrow (f^{-1})'(y_1) < (f^{-1})'(y_2)$$

Οπότε η $(f^{-1})'$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και επομένως η f^{-1} είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Δ4. Για κάθε $x > 1$ η f είναι συνεχής στο $[x, x+1]$ και παραγωγίσιμη στο $(x, x+1)$.
Σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει $\xi_1 \in (x\,, x+1)$ τέτοιο ώστε
$f'(\xi_1) = f(x+1) - f(x)$.
Είναι: $x < \xi_1 < x+1 \overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(x+1) < f'(\xi_1) < f'(x)$
$\Leftrightarrow f'(x+1) < f(x+1) - f(x) < f'(x)$, (1)
Από τη σχέση (1) για $x > 1$ παίρνουμε:

$$f(x+1) - f(x) < f'(x) \Leftrightarrow \frac{f(x+1)}{x} - \frac{f(x)}{x} < \frac{f'(x)}{x}, \quad (2)$$

και $f'(x+1) < f(x+1) - f(x)$. Θέτοντας $u = x+1$ στη σχέση αυτή προκύπτει:

$$f'(u) < f(u) - f(u-1)$$

Δηλαδή για κάθε $x > 2$ είναι:

$$f'(x) < f(x) - f(x-1) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{x} < \frac{f(x)}{x} - \frac{f(x-1)}{x}, \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) ισχύει:

$$\frac{f(x+1)}{x} - \frac{f(x)}{x} < \frac{f'(x)}{x} < \frac{f(x)}{x} - \frac{f(x-1)}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x+1)}{(x+1)} \cdot \frac{(x+1)}{x} - \frac{f(x)}{x} < \frac{f'(x)}{x} < \frac{f(x)}{x} - \frac{f(x-1)}{(x-1)} \cdot \frac{(x-1)}{x}, \qquad (4)$$

Επίσης γνωρίζουμε ότι: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, οπότε και $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x+1)}{x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x-1)}{x-1} = 0$.
Από τη σχέση (4) και με βάση το κριτήριο παρεμβολής συμπεραίνουμε ότι: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{x} = 0$.

Επιμέλεια:
Η ομάδα καθηγητών Μαθηματικών του ΜΕΘΟΔΙΚΟΥ

Ευχόμαστε καλά αποτελέσματα!